1 Dynkin π-λ 定理和单调类定理

这份笔记总结了 Dynkin π-λ 定理的证明. 我们首先介绍一些定义.

定义 1.1. 设 S 是一个非空集合, $\mathcal{P}(S) := \{A \subseteq S\}$ 是 S 的幂集. 称集族 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 是一个 S 上的

1. π-系统, 如果 $\mathcal{A}$ 对集合的有限交运算封闭, 即 $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.
2. σ-代数, 如果
   (i) $S \in \mathcal{A}$
   (ii) $\mathcal{A}$ 对集合的补运算封闭, 即 $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$
   (iii) $\mathcal{A}$ 对集合的可数交运算封闭, 即对可数多个集合 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$, 我们有
   $$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$
3. λ-系统, 如果
   (i) $S \in \mathcal{A}$
   (ii) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{A}$
   (iii) 设 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ 是可数多个互不相交的集合, 则有
   $$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

注记 1.2.

1. σ-代数定义 *(iii)* 中的可数多个如果替换成了有限个, 那么它就成了代数 *(algebra)* 的定义. σ 通常表示可数多个.
2. σ-代数定义 *(iii)* 可以等价替换成: $\mathcal{A}$ 对集合的并运算封闭
3. λ-系统定义 *(iii)* 可以等价替换成: 设 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ 是 $\mathcal{A}$ 中一列可数多个递增的集合, 则
   $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$
4. λ-系统定义中的 *(i)* 和 *(ii)* 说明 λ-系统对集合的补封闭.

5. σ-代数一定是 λ-系统. 设 $\mathcal{A}$ 是 S 上的 σ-代数, 则 λ-系统定义中的 (i) 和 (iii) 显然成立, 对于 (ii), 设 $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$, 则利用 σ-代数的定义, $B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$.

命题 1.3. 设 $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ 是一列 S 上的 σ-代数, I 是任意指标集 (可数或不可数), 则

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

也是一个 σ-代数.

证明. (1) 首先对任意 $i \in I$, $S \in \mathcal{A}_i$, 因此 $S \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. (2) 设 $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$, 则 $A \in \mathcal{A}_i$, $\forall i \in I$, 因此 $A^c \in A_i$, $\forall i \in I$, 即 $A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. (3) 设 $A_1, A_2, \cdots \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ 是可数个集合, 则这些集合也在每个 $\mathcal{A}_i$ 中, 由 σ-代数的定义, 它们的交集在每个 $\mathcal{A}_i$ 中, 即在 $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ 中. □

命题 1.4. 设 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$, 则存在包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 σ-代数 $\mathcal{C}$, 即满足

1. $\mathcal{C}$ 是一个 σ-代数;
2. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$;
3. 对任意包含 $\mathcal{F}$ 的 σ-代数 $\mathcal{A}$, 有 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$.

我们将 $\mathcal{C}$ 记为 $\sigma(\mathcal{F})$.

证明. 设 $\Sigma := \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S) : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{A}$ 是一个 σ-代数$\}$, 首先 Σ 非空, 因为 $\mathcal{P}(S) \in \Sigma$. 令

$$\mathcal{C} := \bigcap_{\mathcal{A} \in \Sigma} \mathcal{A},$$

则 $\mathcal{C}$ 即为包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 σ-代数:(1) 由命题 1.3 可知; (2)$\mathcal{C} \in \Sigma$ 因此 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$; (3) 由交集的定义可知. □

同样的, 我们也可以定义包含集族 $\mathcal{F}$ 的最小的 λ-系统, 记为 $\lambda(\mathcal{F})$.

定理 1.5 (Dynkin π-λ 定理)**.** 设 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 是一个 π-系统, 则

$$\sigma(\mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F}).$$

为了证明上述定理, 我们先来证明一些引理.

引理 1.6. 设 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 是一个 λ-系统, 则 $\mathcal{F}$ 是一个 π-系统当且仅当 $\mathcal{F}$ 是一个 σ-代数.

证明. 设 $\mathcal{F}$ 是一个 π-系统. (1) 由于 $\mathcal{F}$ 是一个 λ-系统, $S \in \mathcal{F}$. (2) 对任意 $A \in \mathcal{F}$, 由于 $\mathcal{F}$ 是一个 λ-系统, $A^c = S \setminus A \in \mathcal{F}$. (3) 设 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ 是可数多个集合. 我们可以将 $\bigcup_i A_i$ 写成不相交集合的并. 令 $F_1 = A_1$, $F_2 = A_2 \setminus F_1$, $F_3 = A_3 \setminus F_2$, $\cdots$, $F_n = A_n \setminus F_{n-1}$,$\cdots$, 从而

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

我们只要证明 $F_1, F_2, \cdots \in \mathcal{F}$ 即可. 下面证明 $\mathcal{F}$ 对集合的差运算封闭. 设 $A, B \in \mathcal{F}$, $A \setminus B = A \cap B^c$, 因为 $\mathcal{F}$ 是 π-系统, 从而对交运算封闭, 并且结合 (2), $\mathcal{F}$ 对补运算封闭, 从而 $A \setminus B \in \mathcal{F}$. 因此 $F_i \in \mathcal{F}$.

设 $\mathcal{F}$ 是一个 σ-代数, 设 $A, B \in \mathcal{F}$, 令 $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_i = \varnothing$, $i \geq 3$, 从而

$$A \cap B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

即 $\mathcal{F}$ 是一个 π-系统. □

引理 1.7. 设 $\mathcal{F}$ 是一个 π-系统, 则 $\lambda(\mathcal{F})$ 也是一个 π-系统.

证明. 对任意 $A \in \lambda(\mathcal{F})$, 定义

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \lambda(\mathcal{F}) : A \cap B \in \lambda(\mathcal{F})\}.$$

要证明 $\lambda(\mathcal{F})$ 是一个 π-系统, 只需要证明 $\lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{C}(A)$ 对任意 $A \in \lambda(\mathcal{F})$ 成立 ($\supseteq$ 显然, 只用证 $\subseteq$). 为此, 我们下面将证明 $\mathcal{C}(A)$ 是一个包含 $\mathcal{F}$ 的 λ-系统, 于是利用 $\lambda(\mathcal{F})$ 的最小性, $\lambda(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{C}(A)$.

Claim: 对任意 $A \in \lambda(\mathcal{F}), \mathcal{C}(A)$ 是一个包含 $\mathcal{F}$ 的 λ-系统.

Step1: 证明 $\mathcal{C}(A)$ 是一个 λ 系统. (1) $A \cap S = A \in \lambda(\mathcal{F})$, 因此 $S \in \mathcal{C}(A)$. (2) 设 $E, F \in \mathcal{C}(A)$ 并且 $E \subseteq F$, 则

$$(F \setminus E) \cap A = (F \cap A) \setminus (E \cap A) \in \lambda(\mathcal{F}),$$

因此 $F \setminus E \in \mathcal{C}(A)$.(3) 设 $F_1, F_2, \cdots \in \mathcal{C}(A)$ 是可数多个互不交的集合, 则

$$(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_i) \cap A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (F_i \cap A) \in \lambda(\mathcal{F}),$$

从而 $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{C}(A)$. 因此 $\mathcal{C}(A)$ 是一个 λ-系统.

Step2: 下面证明对任意 $A \in \lambda(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(A)$. 设 $F \in \mathcal{F}$, 由于 $\mathcal{F}$ 是一个 π-系统, 于是对任意 $E \in \mathcal{F} \subseteq \lambda(\mathcal{F})$, 都有 $E \cap F \in \mathcal{F} \subseteq \lambda(\mathcal{F})$, 即 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(F)$. 由 $\lambda(\mathcal{F})$ 的最小性, $\lambda(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{C}(F)$. 因此对任意 $A \in \lambda(\mathcal{F})$, $A \cap F \in \lambda(\mathcal{F})$. 这说明 $F \in \mathcal{C}(A)$, 从而 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(A)$. □

下面我们来证明 Dynkin π-λ 定理.

证明 *(Dynkin π-λ 定理)*. 1. 首先证明 $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \lambda(\mathcal{F})$. 根据引理 1.7, $\lambda(\mathcal{F})$ 是一个 π-系统, 而 $\lambda(\mathcal{F})$ 显然是一个 λ-系统, 根据引理 1.6, $\lambda(\mathcal{F})$ 是一个 σ-代数. 因此利用 $\sigma(\mathcal{F})$ 是包含 $\mathcal{F}$ 的最小 σ-代数, 我们有 $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \lambda(\mathcal{F})$.
2. 再来证明 $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \lambda(\mathcal{F})$. 这是显然的, 因为 σ-代数 $\sigma(\mathcal{F})$ 一定也是 λ-系统, 由 $\lambda(\mathcal{F})$ 的最小性即证. □

有的书会介绍单调类定理, 它实际上和 Dynkin π-λ 定理等价. 下面是单调类的定义和单调类定理的叙述.

定义 1.8 (单调类)**.** *称集族 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 是一个单调类, 如果 $\mathcal{A}$ 对可数个增集的并封闭以及对可数个减集的交封闭, 即*

(1) *$A_i \in \mathcal{A}$ 且 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, 则 $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$.*

(2) *$A_i \in \mathcal{A}$ 且 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, 则 $\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$.*

类似地, 任意单调类的交集也是单调类. 并且我们可以定义包含集族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 的最小的单调类, 记为 $M(\mathcal{F})$.

引理 1.9. *1. σ-代数是一个单调类.*

2. λ-系统是一个单调类.

3. 单调类是一个 σ-代数当且仅当它是一个代数.

证明. 1. 显然. 2. 设 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 是一个 λ-系统, 则根据 λ-系统的等价定义, $\mathcal{A}$ 对可数个增集的并封闭, 于是 $\mathcal{A}$ 满足了单调类定义的第一条. 设 $A_i \in \mathcal{A}$ 是一列减集, 则 A_i^c 是一列增集, 并且 $A_i^c \in \mathcal{A}$, 于是

$$\bigcup_i A_i^c = (\bigcap_i A_i)^c \in \mathcal{A},$$

从而

$$\bigcap_i A_i \in \mathcal{A},$$

这说明 $\mathcal{A}$ 满足单调类定义中的第二条, 于是 $\mathcal{A}$ 是一个单调类.
3.$\Longrightarrow$ 显然, 我们只证 $\Longleftarrow$. 设 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 是一个单调类, 同时也是一个代数. 设 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ 是可数多个集合, 定义 $B_k = \bigcup_{i=1}^k A_i$, 则 $B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{A}$ 是一个增集, 由单调类的定义可知

$$\bigcup_i A_i = \bigcup B_k \in \mathcal{A},$$

从而 $\mathcal{A}$ 是一个 σ-代数. □

定理 1.10 (单调类定理)**.** *设 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 是一个代数, 则*

$$\sigma(\mathcal{F}) = M(\mathcal{F}).$$

定理 1.11. *单调类定理和 Dynkin π-λ 定理等价.*

证明. 1. 首先设 Dynkin π-λ 定理成立. 设 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 是一个代数. 根据引理 1.9, σ-代数是一个单调类, 由 $M(\mathcal{F})$ 的最小性有 $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq M(\mathcal{F})$. $\mathcal{F}$ 显然是一个 π-系统, 由 Dynkin π-λ 定理,

$$\sigma(\mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F}).$$

下面证明 $M(\mathcal{F})$ 是一个 λ-系统. $M(\mathcal{F})$ 已经满足了 λ-系统定义中的 (1) 和 (3), 我们只用证明 (2). 首先证明 $M(\mathcal{F})$ 对补运算封闭. 定义

$$\mathcal{C} = \{E \in M(\mathcal{F}) : E^c \in M(\mathcal{F})\},$$

显然 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$, 并且 $\mathcal{C}$ 是一个单调类, 由 $M(\mathcal{F})$ 的最小性, $M(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{C}$. 然后证明 $M(\mathcal{F})$ 对交运算封闭. 设 $A \in M(\mathcal{F})$, 定义

$$\mathcal{C}(A) = \{E \in M(\mathcal{F}) : A \cap E \in M(\mathcal{F})\},$$

同样 $\mathcal{C}(A)$ 是一个包含 $\mathcal{F}$ 的单调类, 我们有 $M(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{C}(A)$. 于是对任意 $A, B \in M(\mathcal{F})$, $A \subseteq B$, 则 $B \setminus A = B \cap A^c \in M(\mathcal{F})$. 从而 $M(\mathcal{F})$ 是一个 λ-系统, $\sigma(\mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F}) \subseteq M(\mathcal{F})$. 从而 $\sigma(\mathcal{F}) = M(\mathcal{F})$
2. 设单调类定理成立. 设 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 是一个 π-系统. 因为 $\sigma(\mathcal{F})$ 是一个包含 $\mathcal{F}$ 的 λ-系统, 于是有 $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \lambda(\mathcal{F})$. 我们只用证明 $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \lambda(\mathcal{F})$. 设 $\alpha(\mathcal{F})$ 是包含 $\mathcal{F}$ 的最小的代数, 从而

$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\alpha(\mathcal{F}))$, 这是因为 $\alpha(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, $\sigma(\alpha(\mathcal{F})) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. 由单调类定理,

$$\sigma(\alpha(\mathcal{F})) = M(\alpha(\mathcal{F})),$$

由于 $\lambda(\alpha(\mathcal{F}))$ 是一个单调类 (引理 1.9), 我们有 $M(\alpha(\mathcal{F})) \subseteq \lambda(\alpha(\mathcal{F}))$.
Claim: $\lambda(\alpha(\mathcal{F})) = \lambda(\mathcal{F})$. (这里会用到 $\mathcal{F}$ 是 π-系统!)
◀ $\lambda(\alpha(\mathcal{F})) \supseteq \lambda(\mathcal{F})$ 由 $\lambda(\mathcal{F})$ 最小性直接得到. 另一方面, 由于 $\mathcal{F}$ 是一个 π-系统, $\lambda(\mathcal{F})$ 也是一个 π-系统 (引理 1.7), 因此 $\lambda(\mathcal{F})$ 是一个包含 $\mathcal{F}$ 的代数, 从而 $\alpha(\mathcal{F}) \subseteq \lambda(\mathcal{F})$, 即 $\lambda(\mathcal{F})$ 是一个包含 $\alpha(\mathcal{F})$ 的 λ-系统, 由 $\lambda(\alpha(\mathcal{F}))$ 的最小性有 $\lambda(\alpha(\mathcal{F})) \subseteq \lambda(\mathcal{F})$. ▶
于是

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\alpha(\mathcal{F})) = M(\alpha(\mathcal{F})) \subseteq \lambda(\alpha(\mathcal{F})) = \lambda(\mathcal{F}),$$

从而 $\sigma(\mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F})$. □

最后我们总结一下这些集合系统之间的关系.

- 所有的 σ-代数 $\subseteq$ 所有的 λ-系统 $\subseteq$ 所有的单调类
- 所有的 σ-代数 $\subseteq$ 所有的代数 $\subseteq$ 所有的 π-系统
- σ-代数 $=$ 单调类 $+$ 代数 $=$ λ-系统 $+$ π-系统